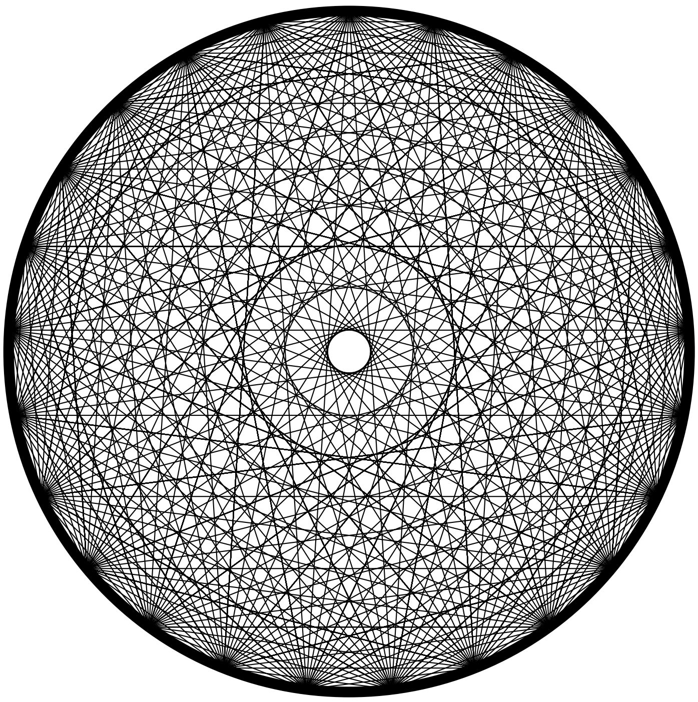
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2022–2023

Svör og lausnir

Efra stig



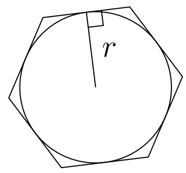
Fyrsti hluti

1. Tilraunarglas inniheldur eina bakteríu. Eftir tvær mínútur skiptir bakterían sér í tvær nákvæmlega eins bakteríur. Eftir tvær mínútur í viðbót skipta þessar tvær bakteríur sér aftur, svo þær eru þá orðnar fjórar. Svona heldur þetta áfram og eftir nákvæmlega klukkustund er tilraunaglasið orðið fullt. Hvað hefði það tekið langan tíma ef glasið hefði byrjað með fjórar slíkar bakteríur?

☐ 30 mínútur ☒ 56 mínútur ☐ 58 mínútur ☐ 60 mínútur

Skýring. Eftir fjórar mínútur eru fjórar bakteríur í glasinu. Þar sem það tekur 60 mínútur fyrir eina bakteríu að skipta sér þannig að hún fylli glasið þá tekur það hana 56 mínútur eftir að hún hefur skipt sér í fernt, að fylla tilraunaglasið. Því tekur það 56 mínútur fyrir fjórar bakteríur að fylla glasið.

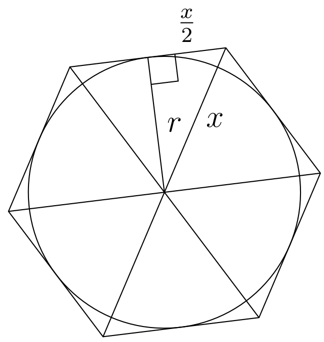
2. Hringur með geisla af lengd $r = 2\sqrt{3}$ snertir allar hliðar reglulegs sexhyrnings. Hver er hliðarlengd sexhyrningsins?



☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4

Skýring. Ef við drögum strikin frá miðju hringsins að hornpunktum sexhyrningsins þá skiptum við honum í 6 reglulega þríhyrninga. Geislinn frá miðju hringsins að snertipunktar við hlið sexhyrnings er hæð í þríhyrningnum með þá hlið og hæðin skiptir hliðinni í helminga.

Ef x stendur fyrir hliðarlengd sexhyrningsins og þar með hliðarlengd þríhyrningsins þá fæst að geislinn ásamt hálfri hlið þríhyrningsins mynda rétthyrndan þríhyrning með langhlið sem er mótlæg hlið þríhyrningsins. Af setningu Pýþagóras fæst að $(x/2)^2 + r^2 = x^2$, það er $r^2 = \frac{3}{4}x^2$. Því er $x^2 = \frac{4}{3}r^2 = \frac{4}{3}(2\sqrt{3})^2 = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$. Því er $x = 4$.

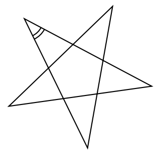


3. Ef $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er fall, $f(1) = 3$ og $f(x) - f(y) = x - y$, hvað er þá $f(20)$?

☐ -1 ☐ 3 ☐ 20 ☒ 22

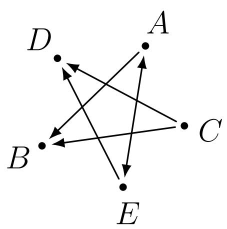
Skýring. Setjum $y \mapsto 1$ og fáum $f(x) - 3 = f(x) - f(1) = x - 1$ svo $f(x) = x + 2$. Því fæst að $f(20) = 20 + 2 = 22$.

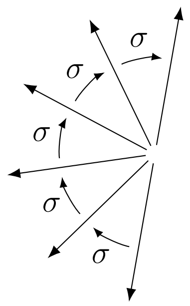
4. Hve stór eru hornin í fimmhyrndri reglulegri stjörnu?



☒ $36°$ ☐ $45°$ ☐ $48°$ ☐ $54°$

Skýring. Látum A, B, C, D og E vera hornpunkta stjörnunnar þannig að hliðar stjörnunnar séu strikin AB, BC, CD, DE og EA. Látum σ vera stærð snúningsins sem snýr strikinu AE um A yfir í strikið AB. Hann er jafnstór snúningnum sem snýr strikinu AB um B yfir í strikið CB því stjarnan er regluleg. Ef við snúum örinni $\overrightarrow{AE}$, frá A til E um horn af stærð σ með miðjur A, B, C, D og E í þessari röð þá fáum við örvarnar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ og að lokum $\overrightarrow{EA}$, það er örina $\overrightarrow{AE}$ snúið um hálfan snúning. Þar sem örvarnar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{ED}$ liggja allar sömu hliðar örvarinnar $\overrightarrow{AE}$ þá ályktum við að fimmfaldur snúningur σ sé snúningur um $180°$. Því er $\sigma = 36°$, það er horn stjörnunnar eru $36°$ af stærð.





5. Stærðin $\sqrt{89 + 12\sqrt{55}}$ er jöfn:

☐ $\sqrt{5} + 4\sqrt{11}$ ☐ $2\sqrt{5} + 3\sqrt{11}$ ☒ $3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}$ ☐ $4\sqrt{5} + \sqrt{11}$

Skýring. Nú eru $\sqrt{89 + 12\sqrt{55}}$, $\sqrt{5}+4\sqrt{11}$, $2\sqrt{5}+3\sqrt{11}$, $3\sqrt{5}+2\sqrt{11}$ og $4\sqrt{5}+\sqrt{11}$ jákvæðar. Ef við hefjum í annað veldi fæst:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{89 + 12\sqrt{55}}\right)^2 &= 89 + 12\sqrt{55} \\
\left(\sqrt{5} + 4\sqrt{11}\right)^2 &= 181 + 8\sqrt{55} \\
\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{11}\right)^2 &= 119 + 12\sqrt{55} \\
\left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right)^2 &= 89 + 12\sqrt{55} \\
\left(4\sqrt{5} + \sqrt{11}\right)^2 &= 91 + 8\sqrt{55}
\end{aligned}$$

Við ályktum að $\sqrt{89 + 12\sqrt{55}} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}$.

6. Fótbolti er samsettur úr 12 fimmhyrningum og 20 sexhyrningum. Hver hornpunktur liggur að nákvæmlega þremur marghyrningum. Hvað eru margir hornpunktar á fótbolta?

☐ 30 ☒ 60 ☐ 90 ☐ 180

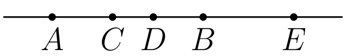
Skýring. Samanlagður fjöldi horna marghyrninganna er $12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 180$. Þar sem hvert horn fótboltans liggur að nákvæmlega þremur marghyrningum þá er þrefaldur fjöldi hornpunkta fótboltans einnig samanlagður fjöldi horna marghyrningsins. Fjöldi hornpunkta er því 60.

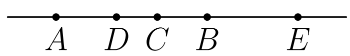
7. Setjum sem svo að A, B, C, D og E séu punktar á línu þannig að B sé á milli C og E, C sé á milli A og E og D sé á milli A og B. Hvað eftirfarandi getur **ekki** gilt:

☐ C er á milli A og B ☐ B er á milli A og E
☐ C er á milli A og D ☒ D er á milli B og E

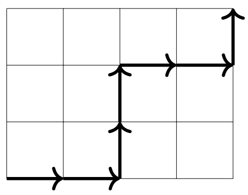
Skýring. Þar sem B er á milli C og E og C er á milli A og E þá er B á milli A og E og C er á milli A og B. Þar sem B er á milli D og E þá er D ekki á milli B og E.

Ef við röðunum punktunum A, B, C, D og E á línuna þannig að C sé á milli A og D, D sé á milli C og B og B sé á milli D og E þá er B á milli C og E, C á milli A og E og D á milli A og B. Það getur því gerst að C sé á milli A og B.





8. Hver er fjöldi leiða frá $(0,0)$ til $(4,3)$ með skrefunum til hægri $\rightarrow$ og upp $\uparrow$?



☐ 22 ☐ 24 ☒ 35 ☐ 128

Skýring. Leiðin tekur alltaf 4 skref til hægri og 3 skref upp, samtals 7 skref. Leiðin ákvarðast af hvar í röðinni skrefin upp eru. Við þurfum því að velja 3 af skrefunum 7 til þess vera upp. Það má gera á $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 7 \cdot 5 = 35$ vegu.

9. Á borði liggja 7 evrumyntir. Framan á stendur hversu margar evrur myntin er og aftan á er myntin merkt einhverju landi evrópusambandsins. Hvað þarf að snúa við mörgum myntum til að vera viss um að allar einnar evru myntir á borðinu séu merktar DE?

2€ DE DE 1€ FR 1€ DE

☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5

Skýring. Við þurfum að athuga hvort myntir sem sýna 1€ hafi örugglega DE á hinni hliðinni og við þurfum að athuga myntirnar sem hafa tákn annars lands en DE séu hafi örugglega ekki 1€ á hinni hliðinni. Við þurfum því að snúa við tveimur 1€ mynntum og einni FR mynnt, samtals þremur mynntum.

10. Jafnan $x^3 - 8x^2 + 6x - 1 = 0$ í breytunni x hefur þrjár rauntölulausnir a, b, c. Hvert er gildið á $a^2 + b^2 + c^2$?

☒ 52 ☐ 64 ☐ 80 ☐ 96

Skýring. Við getum þáttað margliðuna sem $(x - a)(x - b)(x - c)$. Margföldum upp úr sviganum og fáum $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$. Samanburður stuðla gefur að $a + b + c = 8$ og $ab + ac + bc = 6$. Því fæst að $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 8^2 - 2 \cdot 6 = 52$.

Annar hluti

11. Hvaða heiltölur a og b uppfylla $12^{2a+b} \cdot 18^{a+2b} = 36^3 \cdot 2^{3a+2b} \cdot 3^{a+6b-1}$?

Svar. $(a, b) = (2, 1)$.

Skýring. Fáum að vinstri hliðin er

$12^{2a+b} \cdot 18^{a+2b} = (2^2 \cdot 3)^{2a+b} \cdot (2 \cdot 3^2)^{a+2b} = 2^{2(2a+b)+(a+2b)} \cdot 3^{(2a+b)+2(a+2b)} = 2^{5a+4b} \cdot 3^{4a+5b}$

og því $36^3 = (2^2 \cdot 3^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} \cdot 3^{2 \cdot 3} = 2^6 \cdot 3^6$ fæst að hægri hliðin er

$$36^3 \cdot 2^{3a+2b} \cdot 3^{a+6b-1} = 2^{6+(3a+2b)} \cdot 3^{6+(a+6b-1)} = 2^{3a+2b+6} \cdot 3^{a+6b+5}$$

Þar sem frumþáttun ræðra talna er ótvíræð þá eru veldisvísar fyrir hvorn frumþátt þeir sömu í hægri og vinstri hlið. Því fæst

$$\begin{cases} 5a + 4b &= 3a + 2b + 6 \\ 4a + 5b &= a + 6b + 5 \end{cases} \quad \text{sem jafngildir} \quad \begin{cases} 2a + 2b &= 6 \\ 3a - b &= 5 \end{cases}$$

Með því að leggja hálfa fyrri jöfnuna við seinni jöfnuna fæst $3a - b + \frac{1}{2}(2a + 2b) = 5 + \frac{6}{2}$, þ.e. $4a = 8$ svo $a = 2$. Af seinni jöfnunni fæst að $b = 3a - 5 = 3 \cdot 2 - 5 = 1$. Því er $(a, b) = (2, 1)$.

12. Hve margar talnanna $1, 2, \ldots, 2022$ eru deilanlegar með 3 eða 5?

Svar. 944

Skýring. Setjum sem svo að d sé jákvæð heiltala. Þær heiltölur sem eru deilanlegar með d má rita á forminu $n \cdot d$ fyrir $n \in \mathbb{Z}$. Sé $m \in \mathbb{N}$ þá eru þær talnanna $1, 2, \ldots, m$ sem er deilanlegar með d þær tölur $n \cdot d$, þannig að $0 < n \cdot d \leq m$, það er $0 < n \leq \frac{m}{d}$. Það er $0 < n \leq \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$ þar sem $\lfloor x \rfloor$ er stærsta heilalan sem er minni eða jöfn x. Því er $n \in \left\{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor\right\}$ svo n tekur $\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$ gildi. Það eru því $\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$ talnanna $1, 2, \ldots, m$ sem eru deilanlegar með d.

Fyrir náttúrlegar tölur a og b táknum við stærsta samdeili þeirra með $\operatorname{lcm}(a, b)$. Tala er deilanleg með a og b ef og aðeins ef hún er deilanleg með $\operatorname{lcm}(a, b)$.

Fyrir náttúrlegar tölur m og c og endanlega runu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ af jákvæðum heiltölum þá látum við $S(m, (a_1, a_2, \ldots, a_k), c)$ vera fjölda talnanna $1, 2, \ldots, m$ sem eru deilanlegar með c en ekki deilanlegar með neinni talnanna $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Skoðum tölurnar $1, 2, \ldots, m$ sem eru deilanlegar með m og að minnsta kosti einni talnanna $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Við getum flokkað þær eftir síðustu tölunni a_i sem gengur upp í hana. Tölurnar sem eru deilanlegar með a_i en ekki neinna talnanna $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_k$ eru $S(m, (a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_k), \operatorname{lcm}(a_i, c))$. Því fæst að fjöldi talnnan $1, 2, \ldots, m$ sem eru deilanlegar með m og að minnsta kosti einni talnanna $a_1, a_2, \ldots, a_k$ er

$$\begin{aligned} S(m, (a_2, a_3, \ldots, a_k), \operatorname{lcm}(a_1, c)) + S(m, (a_3, a_4, \ldots, a_k), \operatorname{lcm}(a_2, c)) + \cdots \\ + S(m, (), \operatorname{lcm}(a_k, c)). \end{aligned}$$

Fjöldi talnanna $1, 2, \ldots, m$ sem er deilanlegur með c er $\left\lfloor \frac{m}{c} \right\rfloor$ sem einnig má reikna sem

$$\begin{aligned} S(m, (a_1, a_2, \ldots, a_k), c) + \Big(&S(m, (a_2, a_3, \ldots, a_k), \operatorname{lcm}(a_1, c)) \\ &+ S(m, (a_3, a_4, \ldots, a_k), \operatorname{lcm}(a_2, c)) + \cdots \\ &+ S(m, (), \operatorname{lcm}(a_k, c))\Big). \end{aligned}$$

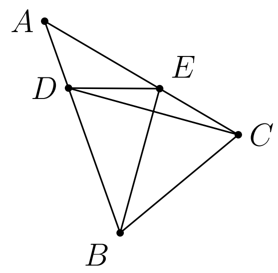
sem gefur

$$\begin{aligned} S(m, (a_1, a_2, \ldots, a_k), c) = \left\lfloor \frac{m}{c} \right\rfloor - \Bigg(&S(m, (a_2, a_3, \ldots, a_k), \operatorname{lcm}(a_1, c)) \\ &+ S(m, (a_3, a_4, \ldots, a_k), \operatorname{lcm}(a_2, c)) + \cdots \\ &+ S(m, (), \operatorname{lcm}(a_k, c))\Bigg). \end{aligned}$$

Við fáum því að fjöldi talnanna $1, 2, \ldots, 2022$ sem er deilanlegur með 3 eða 5 er

$$\begin{aligned} &S(2022, (5), \mathrm{lcm}(3,1)) + S(2022, (), \mathrm{lcm}(5,1)) \\ &= \left(\left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor - S(2022, (), \mathrm{lcm}(3,5))\right) + \left\lfloor \frac{2022}{5} \right\rfloor \\ &= \left(\lfloor 674 \rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{15} \right\rfloor\right) + \left\lfloor 404 + \frac{2}{5} \right\rfloor \\ &= \left(674 - \left\lfloor 134 + \frac{12}{15} \right\rfloor\right) + 404 \\ &= (674 - 134) + 404 \\ &= 944. \end{aligned}$$

13. Þríhyrningurinn $\triangle BAC$ er jafnarma með hliðar AB og AC jafnlangar og $\measuredangle BAC = 40°$. Á strikinu AB er punktur D þannig að $\measuredangle ACD = 15°$ og á strikinu AC er punktur E þannig að $\measuredangle ABE = 35°$. Hver er stærð hornsins $\measuredangle AED$?



Svar. 30°

Skýring. Af setningu um summu stærða horna þríhyrnings leiðir að $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180°$. Þar sem $\measuredangle BAC = 40°$ þá er $\measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 140°$. Þar sem strikin AB og AC eru jafnlöng þá eru hornin $\angle ABC$ og $\angle ACB$ jafnstór. Þar sem $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ þá er $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 70°$.

Þar sem D liggur á strikinu AB þá er D innan hornsins $\angle ACB$ svo $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB$. Þar sem $\measuredangle ACB = 70°$ og $\measuredangle ACD = 15°$ þá fæst að $\measuredangle DCB = 55°$. Af setningu um summu stærða horna þríhyrnings leiðir að $\measuredangle CBD + \measuredangle BCD + \measuredangle BDC = 180°$. Þar sem D liggur á strikinu AB þá er $\angle CBD = \angle ABC$ svo $\measuredangle CBD = \measuredangle ABC = 70°$. Nú er $\measuredangle BCD = 55°$ svo $\measuredangle BDC = 55°$.

Þar sem hornin $\angle BCD$ og $\angle BDC$ eru jafnstór þá eru strikin BC og BD jafnlöng. Þar sem E er á strikinu AC þá er E innan hornins $\angle ABC$ svo $\measuredangle ABC = \measuredangle ABE + \measuredangle EBC$. Þar sem $\measuredangle ABC = 70°$ og $\measuredangle ABE = 35°$ þá er $\measuredangle EBC = 35°$. Nú eru hornin $\angle DBE$ og $\angle CBE$ jafntór, strikin BD og BC eru jafnlöng og strikið BE er jafnlangt sjáflu sér svo strikin DE og CE eru jafnlöng. Nú liggur E á strikinu AC svo $\angle ECD = \angle ACD$ og því $\measuredangle ECD = \measuredangle ACD = 15°$.

Þar sem strikin DE og CE eru jafnlöng þá eru hornin $\angle ECD$ og $\angle EDC$ jafnstór. Því er $\measuredangle EDC = 15°$. Af setningu summu stærða horna þríhyrnings leiðir að $\measuredangle CED + \measuredangle ECD + \measuredangle DEC = 180°$. Þar sem $\measuredangle ECD = \measuredangle EDC = 15°$ þá er $\measuredangle CED = 150°$. Þar sem E liggur á strikinu AC þá eru $\angle AED$ og $\angle CED$ grannhorn. Því er $\measuredangle AED + \measuredangle CED = 180°$. Þar sem $\measuredangle CED = 150°$ þá er $\measuredangle AED = 30°$.

14. Ritið eftirfarandi summu sem fullstytt brot:

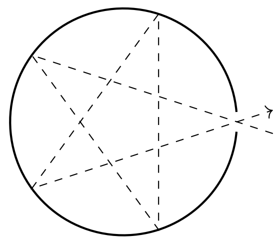
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

Svar. $\frac{99}{100}$

Skýring. Við fáum

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}\\ =&\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\\ =&\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}\end{aligned}$$

15. Í hliðinni á sívalningslaga stálröri er örlítið gat. Innra borð rörsins er fullkomlega speglandi. Á hve marga vegu má miða leysigeisla inn í gatið þannig að það speglist nákvæmlega 24 sinnum af innra borði rörsins áður en hann fer aftur út um gatið? *Til hliðar er ferill geisla sem speglast nákvæmlega fjórum sinnum.*



Svar. 20.

Skýring. Látum θ vera snúninginn um miðju rörsins sem tekur gatið yfir í fyrsta punktinn þar sem geislinn speglast af rörinu. Látum x vera hlutfall θ úr heilum snúning. Þar sem geislinn kemur inn undir sama horni og hann endurvarpast þá er snúningurinn um miðju rörsins frá fyrsta endurvarpspunkti að þeim næst einnig θ. Því er snúningurinn frá gatinu að öðrum speglunarpunktinum $2x$ úr heilum hring. Almennt er snúningurinn um miðju rörsins yfir í n-ta speglunar punkt nx úr heilum snúning.

Þar sem geislinn fer út um gatið eftir 24 speglanir þá tekur snúningurinn um miðju rörsins um $25x$ úr heilum hring gatið yfir í sjálft sig. Því fæst að $25x$ úr heilum snúningi er einhver fjöldi heilla snúninga, það er $25x$ er heiltala. Þar sem $0 \leq x < 1$ þá er $0 \leq 25x < 25$ svo $25x \in \{0,1,\ldots,24\}$, það er $x \in \left\{\frac{0}{25},\frac{1}{25},\ldots,\frac{24}{25}\right\}$.

Þar sem geislinn lendir ekki í gatinu fyrr en eftir 24 speglanir þá er engin talnann $x, 2x, \ldots, 24x$ heiltala. Setjum sem svo að $x = \frac{m}{25}$, $m \in \mathbb{Z}$ og $n \in \{1,\ldots,24\}$. Nú er $nx = \frac{mn}{25}$ svo nx er heiltala ef og aðeins ef 25 gengur upp í mn. Ef n er ósamþátta 25 þá gengur 25 upp í mn ef og aðeins ef 25 gengur upp í m en það stenst ekki þar sem $0 < n < 25$. Ef $d > 1$ er jákvæð heiltala sem gengur upp í 25 og m þá er $25/d \in \{1,\ldots,24\}$ og $(25/d)\cdot x = n/d$ sem er heiltala.

Við ályktum að nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að geislinn speglist nákvæmlega 24 sinnum innan í rörinu áður en hann fer aftur út um gatið sé að $x = \frac{m}{25}$ þar sem $m \in \{0,1,\ldots,24\}$ og m er ósamþátta 25. Nú er 5 eini frumþáttur 25 svo m

er samþátta 25 ef og aðeins ef m er deilanleg með 5 en það eru tölurnar $0, 5, 10, 15, 20$ sem er $25/5 = 5$ talsins. Fjöldi gilda á m (og þar með á x) er $25-5 = 20$. Það má því miða geislanum á 20 vegu inn í rörið þannig að hann speglist nákvæmlega 24 sinnum af innra borði þess áður en hann fer aftur út um gatið.

Þriðji hluti

16. Gutti er að leggja saman jákvæðar heiltölur a og b í vasareikni en gleymir að stimpla inn síðasta tölustaf a, sem er 3, og fær út 222. Ef hann hefði gleymt að stimpla inn síðasta tölustaf b í stað síðasta tölustafs a hefði útkoman verið 500. Hverjar eru tölurnar a og b?

Lausn 1. Látum x vera töluna sem fæst með því að sleppa síðasta tölustaf a og y vera töluna sem fæst með því að sleppa síðasta tölustaf b. Þá er $a = 10x + 3$ og $b = 10y + d$ fyrir eitthvað $0 \leq d \leq 9$. Þá fáum við jöfnunar:

$$x + 10y + d = 222 \quad \text{og} \quad 10x + 3 + y = 500.$$

Ljóst er að a og b eru í mesta lagi þriggja stafa tölur sem gerir x og y að í mesta lagi tveggja stafa tölum. Af seinni jöfnunni má sjá að seinni tölustafur y er 7 og þar að auki að fyrri tölustafur x getur bara verið verið 3 eða 4. Enn fremmur sést af fyrri jöfnunni að fyrri tölustafur y getur bara verið $0, 1$ eða 2 en 2 kemur ekki til greina af því $x \geq 30$. Ef fyrri tölustafur y er 0 gildir

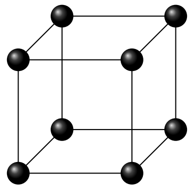
$$222 = x + 10y + d \leq x + 79$$

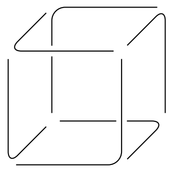
sem getur ekki gengið því x er í mesta lagi tveggja stafa tala. Þar með er ljóst að $y = 17$. Seinni jafnan gefur þá $x = 48$ og þegar x og y eru þekkt gefur fyrri jafnan $d = 4$. Þar með er eina lausnin $a = 483$ og $b = 174$ og þá eru jöfnurnar uppfylltar því $174 + 48 = 222$ og $17 + 483 = 500$.

Lausn 2. Látum x og y vera eins og í fyrri lausninni. Dæmið gefur okkur einnig að $x + 10y + d = 222$ og $10x + 3 + y = 500$. Með því að margfalda seinni jöfnuna með 10 og draga þá fyrri frá henni fæst að $99x + 30 - d = 4778$.

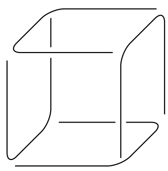
Tökum afganga beggja hliðanna þegar deilt er með 9 og fáum að d hafi afganginn 4 þegar deilt er með 9. Þar sem $0 \leq d \leq 9$ fæst að $d = 4$. Þá höfum við tvær ójöfnur í tveimur óþekktum stærðum og getum leyst beint. Jöfnurnar eru $x + 10y = 218$ og $10x + y = 497$, svo $99y = 2180 - 497 = 1683$, sem gefur loks $y = 17$. Þar með má stinga inn fyrir y og fá $x = 48$. Þar með fæst lausnin $a = 483$, $b = 174$.

17. Marteinn ætlar að búa til tening eins og á mynd úr nokkrum bútum af vír sem hann beygir og kennaratyggjói. Hann vill hafa teninginn þannig að ekki sé meira en einn vír á hverri brún teningsins. Hver er minnsti fjöldi vírbúta sem hann getur framkvæmt þetta með? *Til hægri er sýnt hvernig Marteinn gæti smíðað teninginn með* 6 *vírbútum.*





Lausn. Í hverjum hornpunkti mætast þrjár hliðar. Þar geta annaðhvort mæst þrír endar á vírum, eða einn vírendi ásamt öðrum vír sem liggur meðfram horninu. Það eru 8 hornpunktar á teningnum, svo það eru að minnsta kosti 8 endar á vírum. Hver vír hefur tvo enda, svo vírarnir eru að minnsta kosti 4. Ein margra leiða sem Marteinn getur smíðað teninginn úr fjórum vírum er sýnd á mynd.



18. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að um öll $x, y \in \mathbb{R}$ gildi:

$$f(x + f(y)) = x^2 + 2xf(y) + f(y^2)$$

Lausn. Látum $x \mapsto -f(y)$. Þá verður fallajafnan

$$f(0) = (f(y))^2 - 2(f(y))^2 + f(y^2) = f(y^2) - f(y)^2$$

Setjum $y \mapsto 0$ og fáum $f(0) = f(0) - f(0)^2$ sem gefur $f(0) = 0$. Stingum $y \mapsto 0$ í upphaflegu jöfnuna og fáum beint að $f(x) = x^2$.

Ef $x, y \in \mathbb{R}$ þá er

$$(x + y^2)^2 = x^2 + 2xy^2 + y^4 = x^2 + 2xy^2 + (y^2)^2$$

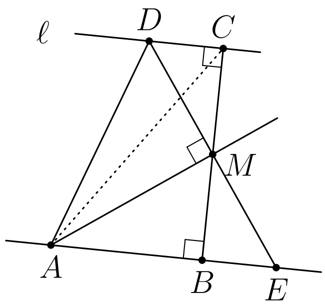
svo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ er lausn.

19. Látum ABC vera rétthyrndan þríhyrning með rétt horn í B. Látum M vera miðpunkt striksins BC. Látum ℓ vera línuna gegnum C hornrétt á línuna BC. Punkturinn D er á línunni ℓ þannig að $\angle AMD$ sé rétt. Sýnið að hálflínan AM sé helmingalína hornsins $\angle BAD$.

Lausn 1. Látum E vera speglun D um M. Nú er B spelgun C um M svo þríhyrningurinn $\triangle MBE$ er speglun þríhyrningsins $\triangle MCD$ um M. Þar sem hornið $\angle MCD$ er rétt þá er $\angle MBE$ líka rétt. Nú er $\angle MBA$ rétt svo línan AB og línan EB er sama línan, það er E liggur á línunni AB.

Nú eru strikin MD og ME jafnlöng og strikið MA er jafnlangt sjálfu sér. Þar sem hornið $\angle AMD$ er rétt þá er það jafnstórt grannhorni sínu, $\angle AME$. Því sést að hornin $\angle MAD$ og $\angle MAE$ eru jafnstór. Þar sem M er miðpunktur striksins DE þá liggja D og E sitthvoru megin við hálflínuna AM. Því fæst að hálflínan AM er helmingalína hornins $\angle EAD$.

Þar sem $\triangle AME$ er rétthyrndur þríhyrningur með rétt horn í M og línan BM er hornrétt á langhliðina, línuna AE þá liggur B á milli A og E. Því er $\angle BAD = \angle EAD$. Við höfum því sýnt að hálflínan AM sé helmingalína hornins $\angle BAD$.



Lausn 2. Látum ϕ vera snústríkkunina þannig að $\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MC}$. Snúningsþáttur ϕ er snúningur um rétt horn.

Látum D' vera punktinn þannig að $\overrightarrow{CD'} = \phi(\overrightarrow{BM})$. Þá er $\overrightarrow{CD'}$ hornrétt á $\overrightarrow{BM}$ svo línan CD' er hornrétt á línuna BC.

Nú er

$$\overrightarrow{MD'} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD'} = \phi(\overrightarrow{AB}) + \phi(\overrightarrow{BM}) = \phi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \phi(\overrightarrow{AM})$$

svo $\overrightarrow{MD'}$ er hornrétt á $\overrightarrow{AM}$, það er línan MD' er hornrétt á línuna AM. Því er $D' = D$. Við höfum því að $\phi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{MD}$.

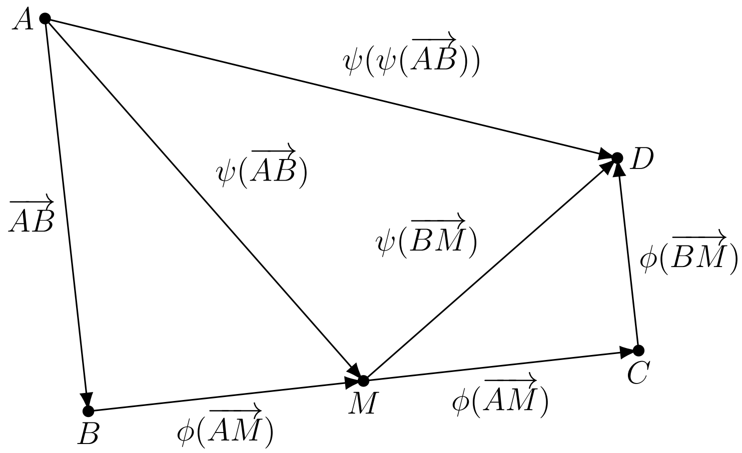
Látum ψ vera snústríkkunina þannig að $\psi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AM}$. Þar sem M er miðpunktur strikins BC þá er $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM}$. Nú víxlast snústríkkanir í sléttunni svo við fáum

$$\phi(\overrightarrow{AM}) = \phi(\psi(\overrightarrow{AB})) = \psi(\phi(\overrightarrow{AB})) = \psi(\overrightarrow{MC}) = \psi(\overrightarrow{BM})$$

Við fáum því

$$\psi(\overrightarrow{AM}) = \psi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \psi(\overrightarrow{AB}) + \psi(\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD}$$

Það er $\overrightarrow{AD} = \psi(\psi(\overrightarrow{AB}))$. Sér í lagi fæst að tvöfaldur snúingurinn sem tekur hálflínuna AB í hálflínuna AM tekur hálflínuna AB í hálflínuna AD. Því er hálflínan AM helmingalína hornsins $\angle BAD$.


A
$\psi(\psi(\overrightarrow{AB}))$
$\psi(\overrightarrow{AB})$
D
$\overrightarrow{AB}$
$\psi(\overrightarrow{BM})$
$\phi(\overrightarrow{BM})$
C
M
$\phi(\overrightarrow{AM})$
B
$\phi(\overrightarrow{AM})$